

4.4.2 Sinová věta II

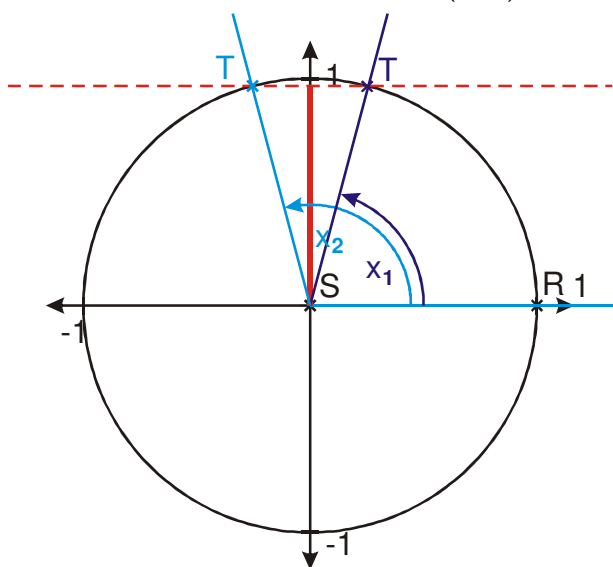
Předpoklady: 040401

Pedagogická poznámka: Geometrické interpretace výpočtů nejsou zadány jako příklady, ale přesto se ve třídě snažím, aby k nim žáci došli pokud možno samostatně.

Kde se stala chyba?

Námi nalezené řešení je správné, ale nenašli jsme druhé \Rightarrow chyba ve chvíli, kdy jsme z hodnoty $\sin \beta$ určovali úhel β .

β je úhel z intervalu $(0; \pi)$. Jak je vidět z jednotkové kružnice, úhly, pro které platí $\sin \beta = 0,96687$, jsou v intervalu $(0; \pi)$ dva \Rightarrow musíme počítat s oběma.



Př. 1: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $a = 6,1$; $b = 7,2$; $\alpha = 55^\circ$. Postupuj tak, abys našel všechna řešení příkladu.

Tentokrát to zkusíme správně.

Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel proti straně b).

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{7,2}{6,1} \sin 55^\circ \doteq 0,96687$$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existovat dva \Rightarrow musíme zkoumat oba.

$$\beta_1 = 75^\circ 13'$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 75^\circ 13' = 104^\circ 47'$$

Dopočítáme úhel γ_1 :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - (55^\circ + 75^\circ 13') = 49^\circ 47'$$

Dopočítáme úhel γ_2 :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (55^\circ + 104^\circ 47') = 20^\circ 13'$$

Ted' můžeme vypočítat c_1 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

Ted' můžeme vypočítat c_2 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 49^\circ 47'}{\sin 55^\circ} \cdot 6,1 = 5,686$$

$$c_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 20^\circ 13'}{\sin 55^\circ} \cdot 6,1 = 2,57$$

Příklad má dvě řešení:

- 1) $a = 6,1$, $b = 7,2$, $c_1 = 5,686$, $\alpha = 55^\circ$, $\beta_1 = 75^\circ 13'$, $\gamma_1 = 49^\circ 47'$.
- 2) $a = 6,1$, $b = 7,2$, $c_2 = 2,573$, $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 104^\circ 47'$, $\gamma = 20^\circ 13'$.

Proč první dva příklady v minulé hodině:

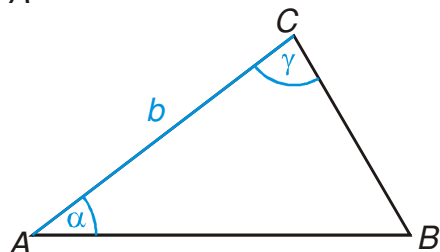
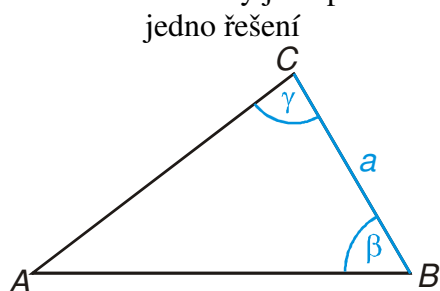
- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $a = 10$, $\beta = 100^\circ$, $\gamma = 50^\circ$.
- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $b = 51,23$, $\alpha = 61^\circ 28'$, $\gamma = 8^\circ 13'$.

měli jediné řešení,

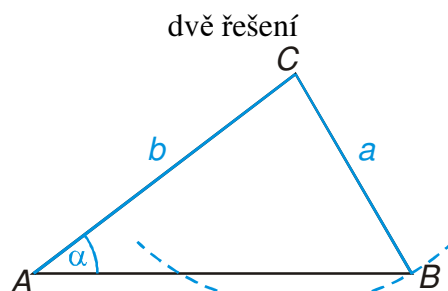
zatímco příklad:

- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $a = 6,1$, $b = 7,2$, $\alpha = 55^\circ$. má řešení dvě?

Zkusíme si udělat náčrtky jako při řešení konstrukčních úloh:



Trojúhelníky jsou dány větou usu , která je jednoznačnou větou o shodnosti.



Trojúhelník je zadán větou ssu , která je jednoznačná pouze v případě, že strana proti zadanému úhlu (v našem případě strana a) je větší (což v našem případě není).

Z obrázků je zřejmé:

- pokud zadání příkladu odpovídá jednoznačně zadané konstrukci, příklad má jediné řešení,
- pokud zadání příkladu odpovídá nejednoznačně zadané konstrukci, příklad má více řešení.

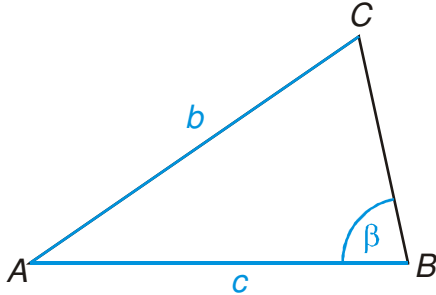
Př. 2: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $c = 25$; $b = 21$; $\beta = 81^\circ$. Najdi všechna řešení příkladu.

Nejdříve určíme úhel γ (potřebujeme úhel pro straně c).

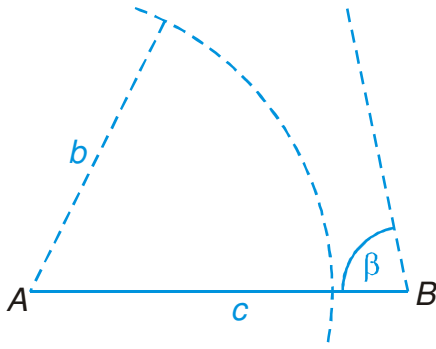
$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin \beta = \frac{25}{21} \sin 81^\circ \doteq 1,1758$ toto číslo nemůže být hodnotou funkce sinus \Rightarrow takový trojúhelník neexistuje.

Zkusíme stejně jako v předchozím případě využít konstrukci trojúhelníků k pochopení toho, co se stalo.

Přibližný náčrtek trojúhelníku v zadání:



Náčrtek konstrukce:



Délka strany b je zřejmě příliš malá, aby se kružnice protнула s polopřímku, na které leží vrchol $C \Rightarrow$ trojúhelník nejde ani sestavit ani spočítat.

Pedagogická poznámka: Žáci (logicky) očekávají, že příklad 2 bude klasické dopočtení trojúhelníku s dvěma řešeními. Vsunutí příkladu 2, který nečekaně nemá řešení, jednak staví žáky do situace, na kterou nejsou připraveni, a hlavně u některých vede k tomu, že před následujícím příkladem opět zapomenou, na co si měli dávat pozor.

Př. 3: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku ABC , je-li dáno: $a = 7,307$; $b = 8,981$; $\alpha = 31^\circ 53'$. Najdi všechna řešení příkladu.

Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel proti straně b).

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{8,981}{7,307} \sin 31^\circ 53' \doteq 0,649198$$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existovat dva \Rightarrow musíme využít oba.

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{8,981}{7,307} \sin 31^\circ 53'\right) = 40^\circ 29'$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 40^\circ 29' = 139^\circ 31'$$

Dopočítáme úhel γ_2 :

Dopočítáme úhel γ_1 :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (31^\circ 53' + 139^\circ 31') = 8^\circ 36'$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - (31^\circ 53' + 40^\circ 29') = 107^\circ 38'$$

Ted' můžeme vypočítat c_2 :

Ted' můžeme vypočítat c_1 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 107^\circ 38'}{\sin 31^\circ 53'} \cdot 7,307 = 13,18$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 8^\circ 36'}{\sin 31^\circ 53'} \cdot 7,307 = 2,069$$

Příklad má dvě řešení:

- $a = 7,307, b = 8,981, c_1 = 13,18, \alpha = 31^\circ 53', \beta_1 = 40^\circ 29', \gamma_1 = 107^\circ 38',$
- $a = 7,307, b = 8,981, c_2 = 2,069, \alpha = 31^\circ 53', \beta_2 = 139^\circ 31', \gamma_1 = 8^\circ 36'.$

Př. 4: V trojúhelníku jsou dány dvě strany (o velikostech 8,7 a 5,3) a úhel proti větší z nich ($85^\circ 35'$). Urči všechny strany a úhly v trojúhelníku.

Při výpočtu budeme používat vzorce \Rightarrow můžeme si ulehčit práci pojmenováním stran. Strany si můžeme pojmenovat libovolně, například $a = 8,7, b = 5,3$. Zadaný úhel má ležet proti delší ze zadaných stran \Rightarrow leží proti straně $a \Rightarrow \alpha = 85^\circ 35'$. Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně b).

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{5,3}{8,7} \sin 85^\circ 35' \doteq 0,607386$$

Úhly s touto hodnotou sinu existují dva \Rightarrow musíme využít oba.

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{5,3}{8,7} \sin 85^\circ 35'\right) = 37^\circ 24'$$

$$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - 37^\circ 24' = 142^\circ 36'$$

Dopočítáme úhel γ_2 :

Dopočítáme úhel γ_1 :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (85^\circ 35' + 142^\circ 36') = -48^\circ 11'$$

$$\gamma_1 = 180^\circ - (85^\circ 35' + 37^\circ 24') = 57^\circ 1'$$

Záporný úhel není možný \Rightarrow příklad má jediné řešení.

Ted' můžeme vypočítat c_1 :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 57^\circ 1'}{\sin 85^\circ 35'} \cdot 8,7 = 7,320$$

Příklad má jedno řešení: $a = 8,7, b = 5,3, c = 7,320, \alpha = 85^\circ 35', \beta = 37^\circ 24', \gamma = 57^\circ 1'$.

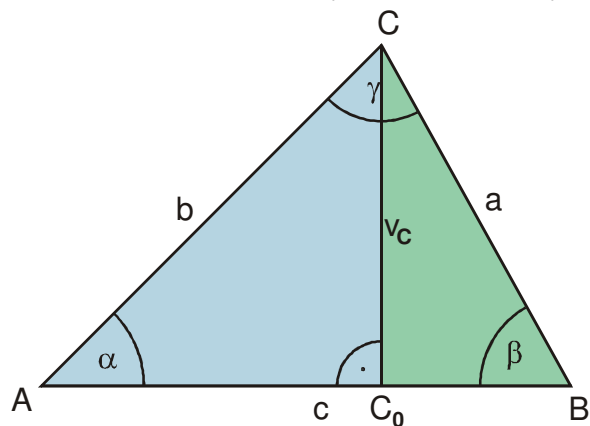
Př. 5: V předchozím příkladu bylo jasné, že druhá hodnota úhlu β_2 nevyhovuje zadání ještě dříve než jsme určili hodnotu úhlu γ_2 (dokonce ještě dříve než jsme hodnotu úhlu β_2 spočítali). Najdi důvod proč. Které pravidlo pro trojúhelník nám v některých případech ušetří počítání druhé velikosti úhlu?

Zadané strany jsme si označili: $a = 8,7, b = 5,3$, úhel proti větší z nich pak $\alpha = 85^\circ 35'$.

V trojúhelníku vždy platí, že větší úhel leží proti větší straně \Rightarrow hodnoty úhlu β tak musí být menší než $\alpha = 85^\circ 35'$. Pokud platí $\beta_1 = 37^\circ 24'$ je jasné, že úhel $\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ by byl větší bude větší než 90° a tedy i větší než α což není možné.

Sinová věta si koleduje o důkaz, nejdříve zkusíme vztah $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$.

Máme ostroúhlý trojúhelník ABC . Sestrojíme výšku v_C , její patu označíme C_0 . Vzniknou dva další trojúhelníky - ACC_0 (modrý) a BCC_0 (zelený) oba pravoúhlé \Rightarrow s nimi umíme počítat.



V obou trojúhelnících vyjádříme velikost výšky v_C .

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin \alpha = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin \alpha \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin \beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin \beta \cdot a$.

Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a$.

$$\sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a \quad / : (\sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

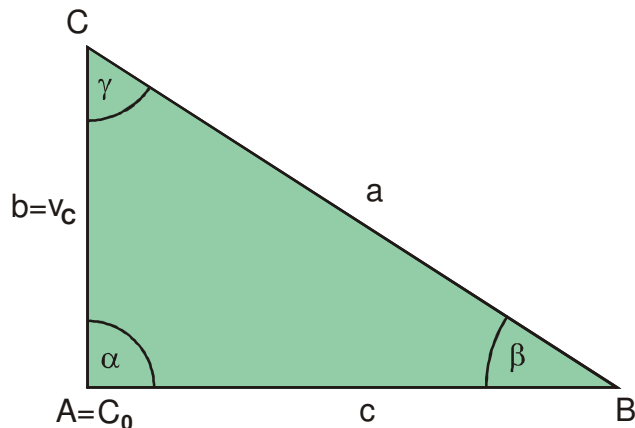
$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (\text{to jsme měli dokázat})$$

Platí toto odvození vždy?

Platí pouze pro úhly $\alpha < 90^\circ$ (aby situace odpovídala obrázku).

Př. 6: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$, když platí $\alpha = 90^\circ$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník zmizel, ale platí: $v_C = b$.

Trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin \beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin \beta \cdot a$.

Důkaz se zdaří, když bude platit: $v_C = b = \sin \alpha \cdot b$. Víme, že platí:

$$v_C = b = 1 \cdot b = \sin \alpha \cdot b, \text{ protože } \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

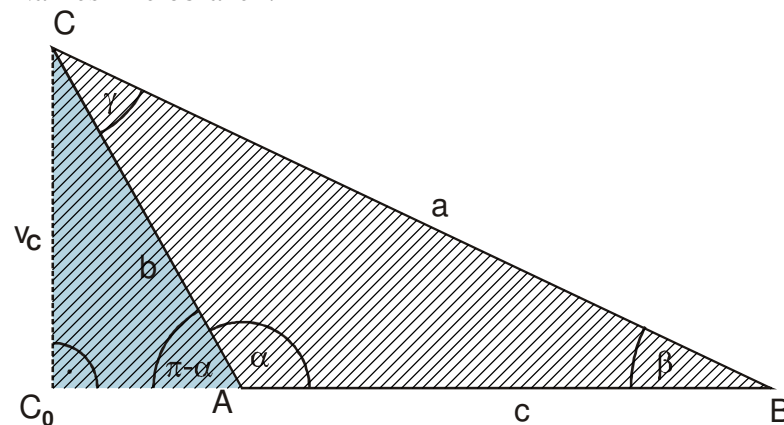
Oba výrazy pro v_C se musí rovnat: $v_C = \sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a$.

$$\sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a \quad | : (\sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (\text{to jsme měli dokázat})$$

Př. 7: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$, když platí $180^\circ > \alpha > 90^\circ$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník částečně překrývá trojúhelník šrafovaný (původně zelený).

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin(\pi - \alpha) \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (šrafovaný): $\sin \beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin \beta \cdot a$.

Potřebujeme $\sin \alpha$, ne $\sin(\pi - \alpha)$.

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \text{tedy: } v_C = \sin \alpha \cdot b.$$

Oba výrazy pro v_C se musí rovnat: $v_C = \sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a$.

$$\sin \alpha \cdot b = \sin \beta \cdot a \quad | : (\sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad (\text{to jsme měli dokázat})$$

Žádná další možnost velikosti úhlu α není \Rightarrow vztah $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ jsme dokázali pro všechny obecné trojúhelníky.

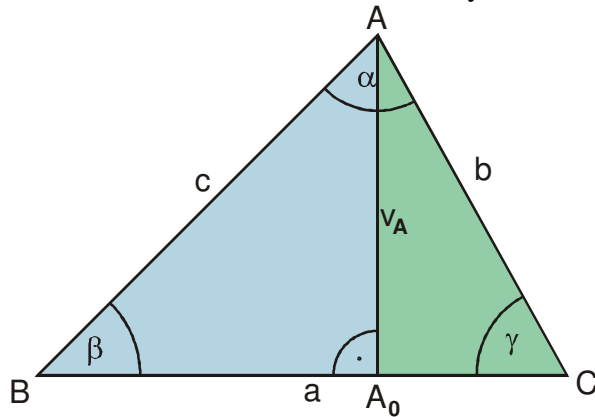
Postřeh: Tímto jsme fakticky dokázali i platnost vztahů $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ a $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Při kreslení obrázku nezáleželo na tom, jakým písmenem si strany, se kterými jsme pracovali,

označíme \Rightarrow stačí změnit označení vrcholů a dokážeme místo rovnosti $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ jednu ze zbývajících dvou rovností.

Př. 8: Nakresli obrázek pro první část důkazu tak, aby z ní vyplynula rovnost

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Prohodíme označení vrcholů tak, aby vrchol A byl nahoře.



Poznámka: Při formulaci věty o trojúhelníku se můžeme zcela obejít bez pojmenovávání stran, úhlů nebo vrcholů. Například sinová věta může být vyslovena takto:

Pro každý trojúhelník platí, že poměr strany a sinu protějšího úhlu je vždy stejný.

Př. 9: Petáková:
strana 49/cvičení 75 b) c)
strana 49/cvičení 79

Shrnutí: Při řešení trojúhelníku pomocí sinové věty, musíme dát pozor na možnou existenci dvou řešení.